

Третий тур 29.11.2025. Высшая лига.

1. На сторонах AB , BC и AC остроугольного треугольника ABC отметили точки P , Q и R соответственно так, что $PBQR$ — ромб. Касательные, проведенные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C , пересекаются в точке T . На отрезках AT и TC выбраны точки K и L соответственно так, что $\angle APK = \angle AQP$ и $\angle CQL = \angle CPQ$. Докажите, что прямые KL и PQ симметричны относительно прямой AC .

2. Дано натуральное число n . На рёбрах графа с 2^n вершинами написаны попарно различные вещественные числа. Назовём путь $v_1v_2 \dots v_k$ ($k \geq 1$) *возрастающим*, если числа на его рёбрах v_1v_2 , v_2v_3 , \dots , $v_{k-1}v_k$ идут в порядке возрастания. Оказалось, что не существует двух различных возрастающих путей $v_1v_2 \dots v_s$ и $w_1w_2 \dots w_t$, у которых $v_1 = w_1$ и $v_s = w_t$. Найдите наибольшее возможное количество рёбер в таком графе.

3. Есть двое песочных часов, одни отмеряют a минут, другие — b минут, где $a < b$ — взаимно простые натуральные числа. Сейчас весь песок внизу колб. Докажите, что с помощью этих часов можно отмерить от нынешнего момента любое целое число минут, не меньшее $b + (a/2 - 1)^2$.

4. Дан выпуклый многогранник P . Три параллельных плоскости α , β , γ , находящихся (в этом порядке) на равных расстояниях друг от друга, высекают из P многоугольники A , B , C соответственно. Известно, что в A содержится эллипс площади a , а в C — эллипс площади c . При каком наибольшем b можно гарантировать, что B содержит эллипс площади b ?

5. Дано натуральное число n . Натуральные числа x и y — делители числа $2n^2 - 1$. Докажите, что число $x + y$ не делится на $2n + 1$.

6. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами имеет как минимум 1000 различных действительных корней. Докажите, что для любого действительного числа a многочлен

$$P(x) + aC_{2025}^1 P'(x) + a^2 C_{2025}^2 P''(x) + \dots + a^{2025} C_{2025}^{2025} P^{(2025)}(x)$$

имеет хотя бы один действительный корень. Напомним, что $P^{(n)}(x) = P^{''\dots'}(x)$ — это n -я производная многочлена $P(x)$.

7. Докажите, что существует $C > 0$, для которого при каждом натуральном n верно следующее утверждение. Пусть на плоскости даны единичные векторы $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, причём при каждом $i = 1, 2, \dots, n$ вектор \vec{v}_i получается из \vec{v}_{i-1} поворотом против часовой стрелки на угол α_i , где $\pi/2 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 3\pi/2$. Тогда длина суммы всех $n + 1$ векторов не превосходит C .

8. Для подмножеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ обозначим $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$; в частности, если $x \in \mathbb{R}$, то $x + Y = \{x\} + Y = \{x + y : y \in Y\}$.

Пусть B — (не обязательно конечное) множество вещественных чисел, содержащее 0 и вместе с любым числом содержащее ему противоположное. Обозначим $B_k = \underbrace{B + B + \dots + B}_k$. Предположим,

что для каждого k множество B_k покрывается конечным количеством множеств вида $a + B$, $a \in \mathbb{R}$, и обозначим через $f(k)$ наименьшее количество множеств в таком покрытии. Предположим, что $f(k)$ постоянна при всех достаточно больших k . Докажите, что, также при достаточно больших k , вместе с любыми двумя числами B_k содержит их разность.

9. В игре участвуют n игроков, пронумерованных числами $1, 2, \dots, n$, которые ходят по очереди в циклическом порядке. Вначале на доске нарисовано конечное дерево, и в одной из его вершин стоит фишка. Каждым ходом очередной игрок двигает фишку по ребру в соседнюю вершину, в которой она ещё не была. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. При каждом натуральном $n > k$ выясните, может ли так случиться, что перед началом игры любые k игроков могут договориться о совместных действиях так, чтобы ни один из них гарантированно не проиграл.

10. Дан треугольник ABC . Выбирается произвольная касательная ℓ к его описанной окружности, которая пересекает прямые BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Прямые AD , BE и CF отразили относительно биссектрис углов A , B и C треугольника ABC соответственно, и они образовали треугольник. Докажите, что его площадь не зависит от выбора касательной ℓ .

Третий тур 29.11.2025. Первая лига.

1. На сторонах AB , BC и AC остроугольного треугольника ABC отметили точки P , Q и R соответственно так, что $PBQR$ — ромб. Касательные, проведенные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C , пересекаются в точке T . На отрезках AT и TC выбраны точки K и L соответственно так, что $\angle APK = \angle AQP$ и $\angle CQL = \angle CPQ$. Докажите, что прямые KL и PQ симметричны относительно прямой AC .

2. Дано натуральное число n . На рёбрах графа с 2^n вершинами написаны попарно различные вещественные числа. Назовём путь $v_1v_2 \dots v_k$ ($k \geq 1$) *возрастающим*, если числа на его рёбрах v_1v_2 , v_2v_3 , \dots , $v_{k-1}v_k$ идут в порядке возрастания. Оказалось, что не существует двух различных возрастающих путей $v_1v_2 \dots v_s$ и $w_1w_2 \dots w_t$, у которых $v_1 = w_1$ и $v_s = w_t$. Найдите наибольшее возможное количество рёбер в таком графе.

3. Есть двое песочных часов, одни отмеряют a минут, другие — b минут, где $a < b$ — взаимно простые натуральные числа. Сейчас весь песок внизу колб. Докажите, что с помощью этих часов можно отмерить от нынешнего момента любое целое число минут, не меньшее $b + (a/2 - 1)^2$.

4. Дан выпуклый многогранник P . Три параллельных плоскости α , β , γ , находящихся (в этом порядке) на равных расстояниях друг от друга, высекают из P многоугольники A , B , C соответственно. Известно, что в A содержится квадрат со стороной a , а в C — квадрат со стороной c . При каком наибольшем b можно гарантировать, что B содержит квадрат со стороной b ?

5. Дано натуральное число n . Натуральные числа x и y — делители числа $2n^2 - 1$. Докажите, что число $x + y$ не делится на $2n + 1$.

6. Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами имеет как минимум 1000 различных действительных корней. Докажите, что для любого действительного числа a многочлен

$$P(x) + aC_{2025}^1 P'(x) + a^2 C_{2025}^2 P''(x) + \dots + a^{2025} C_{2025}^{2025} P^{(2025)}(x)$$

имеет хотя бы один действительный корень. Напомним, что $P^{(n)}(x) = P^{''\dots'}(x)$ — это n -я производная многочлена $P(x)$.

7. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(xy) + f(f(y)) = f((x+1)f(y))$$

для всех вещественных x и y .

8. Для подмножеств $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ обозначим $X + Y = \{x + y: x \in X, y \in Y\}$; в частности, если $x \in \mathbb{R}$, то $x + Y = \{x\} + Y = \{x + y: y \in Y\}$.

Пусть B — (не обязательно конечное) множество вещественных чисел, содержащее 0 и вместе с любым числом содержащее ему противоположное. Обозначим $B_k = \underbrace{B + B + \dots + B}_k$. Предположим,

что для каждого k множество B_k покрывается конечным количеством множеств вида $a + B$, $a \in \mathbb{R}$, и обозначим через $f(k)$ наименьшее количество множеств в таком покрытии. Предположим, что $f(k)$ постоянна при всех достаточно больших k . Докажите, что, также при достаточно больших k , вместе с любыми двумя числами B_k содержит их разность.

9. В игре участвуют 5 игроков, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, которые ходят по очереди в циклическом порядке. Вначале на доске нарисовано конечное дерево, и в одной из его вершин стоит фишка. Каждым ходом очередной игрок двигает фишку по ребру в соседнюю вершину, в которой она ещё не была. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Может ли случиться, что перед началом игры любые двое игроков могут договориться о совместных действиях так, чтобы ни один из них гарантированно не проиграл?

10. Дан треугольник ABC . Выбирается произвольная касательная ℓ к его описанной окружности, которая пересекает прямые BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Прямые AD , BE и CF отразили относительно биссектрис углов A , B и C треугольника ABC соответственно, и они образовали треугольник. Докажите, что его площадь не зависит от выбора касательной ℓ .